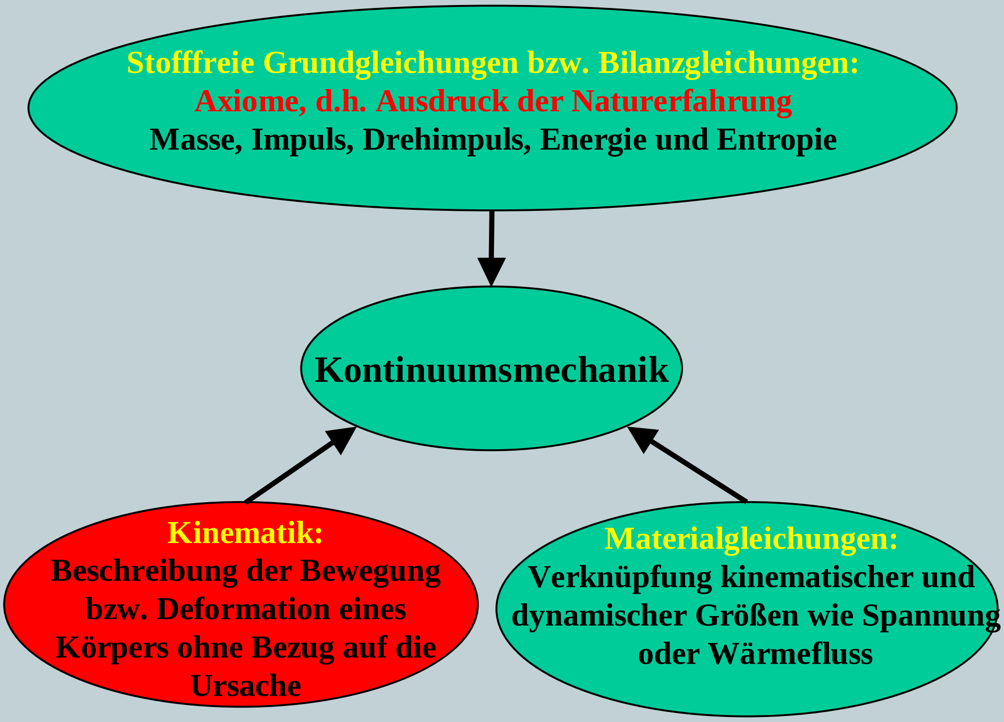
Ausgabe: 07 / 2005

Einführung in die Mechanik
Teil 6: Hauptachsentransformation

Rückblick und Ausblick: Bevor wir zum eigentlichen Thema kommen noch ein paar grundsätzliche Anmerkungen. Einen Überblick/Einordnung des Bisherigen im Kontext der Kontinuumsmechanik liefert folgende Grafik:



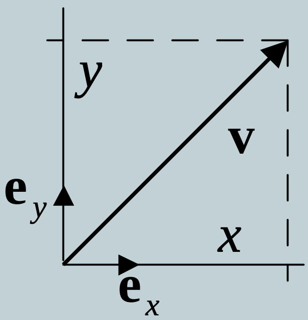
Wir haben uns bis jetzt ausschließlich im „roten Feld“ bewegt,d.h wir haben lediglich die Bewegung (=Kinematik, Deformationsgradient **F,** Artikel 1-3) und die daraus ableitbare Verformung (Verzerrungstensoren nach Green, Hencky und Almansi, Artikel 3-5) beschrieben. Das hat mit dem Spannungsbegriff zunächst auch nichts zu tun!

Ist die Kinematik abgeschlossen werden wir uns dem Feld „Materialgleichungen“ zuwenden. Hier werden wir den Begriff „Spannung“ definieren und dabei feststellen, dass es genauso wie bei den Verzerrungen auch hier mehrere Definitionen davon gibt. Wesentlich wird dann die Verknüpfung von kinematischen (Verzerrungen) und dynamischen (Spannungen) Größen in den sog. Materialgleichungen sein.

Einführung in die Mechanik
Teil 6: Hauptachsentransformation

Wie im letzten Teil angekündigt, beschäftigen wir uns in diesem Teil hauptsächlich mit der Hauptachsentransformation von Tensoren 2.Stufe. Verwenden werden wir dies bei der Berechnung der wahren bzw. logarithmischen Verzerrungen (Hencky Verzerrungen).

Hierzu einige Anmerkungen. Jeder Vektor oder Tensor 2.Stufe (Matrix) besitzt eine **Basis**. Dies ist bei Vektoren auch jedem „geläufig". Hier zur Illustration ein einfaches Beispiel (2-D):



$$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$$

$$\text{Matrizenschreibweise:}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Stellen wir Tensoren in Matrizenschreibweise dar wird häufig übersehen, dass die angegebenen Koordinaten (hier:x,y) sich auf eine Basis beziehen! In unserem Fall das kartesische System $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$. Wie lauten nun aber die Koordinaten des selben Vektors $\mathbf{v}$ in einem anderen Koordinatensystem $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$? Dafür geben wir uns den Zusammenhang zwischen altem und neuen Koordinatensystem vor und setzen dies in die Darstellung für $\mathbf{v}$ ein:

$$\mathbf{e}_x = a\mathbf{n}_1 + b\mathbf{n}_2 \quad ; \quad \mathbf{e}_y = c\mathbf{n}_1 + d\mathbf{n}_2$$

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y = x(a\mathbf{n}_1 + b\mathbf{n}_2) + y(c\mathbf{n}_1 + d\mathbf{n}_2)$$

$$= (xa + yc)\mathbf{n}_1 + (xb + yd)\mathbf{n}_2$$

$$\Rightarrow \text{Matrizenschreibweise:} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} xa + yc \\ xb + yd \end{pmatrix}_{\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2}$$

Einführung in die Mechanik
Teil 6: Hauptachsentransformation

Offensichtlich besitzt der selbe Vektor in einem anderen Koordinatensystem auch andere Koordinaten! Diese Erkenntnis wollen wir nun auf Tensoren 2.Stufe übertragen. Wir wollen uns hier zunächst ebenfalls auf den 2-D Fall beschränken und betrachten ausschließlich symmetrische Tensoren (Matrizen) wie z.B.:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}$$

Ein Tensor 2.Stufe besitzt im 2-D Fall offensichtlich 4 Koordinaten (im 3-D Fall sind es 9). Dies bedeutet, dass es auch 4 (3-D Fall 9) von einander unabhängige Basen geben muss. Diese Basen werden durch ein sogenanntes **dyadisches** Produkt gebildet. Für dieses Produkt gelten wiederum besondere Rechenregeln, die wir zu gegebener Zeit kennen lernen werden. Man schreibt diese wie folgt:

$$\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x \quad ; \quad \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y \quad ; \quad \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x \quad ; \quad \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y$$

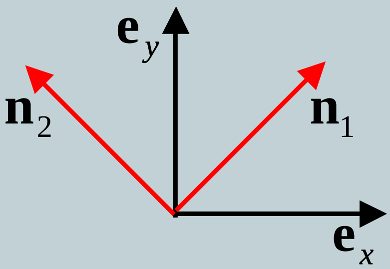
Damit lässt sich A ,wie bisher bei Vektoren auch, als Summe aus Koordinaten und Basen darstellen. Die Zuordnung von Koordinate und Basis ist leicht zu erkennen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = 1{,}5\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - 0{,}5\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y - 0{,}5\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x + 1{,}5\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y$$

Einführung in die Mechanik
Teil 6: Hauptachsentransformation

Nachdem wir nun eine **allgemein** gültige Darstellung für diese Tensoren gefunden haben, können wir nun darangehen und genauso wie bei einem Vektor einen Wechsel der Basis vornehmen. Wie wählen als neue Basisvektoren



$$\mathbf{n}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_y \quad ; \quad \mathbf{n}_2 = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_y$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{e}_x = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_2 \quad ; \quad \mathbf{e}_y = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_2$$

Die „alten“ Basen **e** werden nun durch die „neuen“ Basen **n** ersetzt. Dabei gilt das Distributionsgesetz auch für dyadische Basen, also

$$(a\ \mathbf{a} + b\ \mathbf{b}) \otimes j\ \mathbf{c} = a\,j\ \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} + b\,j\ \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}$$

α, β, φ sind hier Skalare. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} = 1{,}5&\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_2\right) \otimes \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_2\right) - \\
-0{,}5&\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_2\right) \otimes \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_2\right) - \\
-0{,}5&\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_2\right) \otimes \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_2\right) + \\
+1{,}5&\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_2\right) \otimes \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad \mathbf{A} &= 1\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 - 0\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_2 - 0\mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_1 + 2\mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 \\
&= \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + 2\mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2
\end{aligned}$$

$$\text{Matrizenschreibweise:} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2}$$

Einführung in die Mechanik
Teil 6: Hauptachsentransformation

Damit ist die Darstellung dieses Tensors in dem neuen Koordinatensystem gefunden. Er scheint zudem eine besonders **einfache** Darstellung zu besitzen: Er hat nur Koordinaten ungleich Null in der Hauptdiagonalen. Eine Darstellung in dieser Weise nennt man **Hauptachsendarstellung** eines Tensors. Diese beinhaltet zudem ganz charakteristische Größen dieses Tensors: Zum einen die Basisvektoren **n**, diese nennt man **Eigenvektoren** und zum Anderen die Werte in der Hauptdiagonalen, die sog. **Eigenwerte** (hier: 1, 2).

Hier noch zwei wichtige Eigenschaften symmetrischer Tensoren:

1. Die Eigenwerte sind immer reell.
2. Die Eigenvektoren stehen immer senkrecht aufeinander und werden normiert auf 1, d.h.

$$\mathbf{n}_i \bullet \mathbf{n}_j = 0 \quad \text{für} \;\; i \neq j$$

$$\mathbf{n}_i \bullet \mathbf{n}_j = 1 \quad \text{für} \;\; i = j$$

Die entscheidende Frage lautet nun: Wie können Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet werden? Hierzu ein kleines „Experiment“. Wir multiplizieren den Tensor **A** mit seinen Eigenvektoren **n**. Dies tun wir in Matrizenschreibweise in der Hauptachsendarstellung. Dabei ist zu beachten, dass die Eigenvektoren nun die neue Basis sind und damit die Koordinatendarstellung $\mathbf{n}_1$=[1,0]; $\mathbf{n}_2$=[0,1] besitzen. Damit gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = l_1 \mathbf{n}_1$$

Einführung in die Mechanik
Teil 6: Hauptachsentransformation

$$\mathbf{An}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = l_2\mathbf{n}_2$$

$$\boxed{\text{allgemein:} \quad \mathbf{An}_i = l_i\mathbf{n}_i}$$

In Worten: Multipliziert man einen Tensor mit seinem Eigenvektor erhält man den Eigenvektor skaliert mit dem Eigenwert! Dies macht man sich für die Berechnung der Eigenwerte zu Nutze. Man rechnet (**1** ist der Einheitstensor):

$$\mathbf{An} = l\,\mathbf{n} = l\,\mathbf{1n} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - l\,\mathbf{1})\mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$$\text{Im Beispiel:} \quad \left(\begin{pmatrix} 1{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix} - l\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1{,}5 - l & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1{,}5 - l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um nun fortfahren zu können, braucht man einige Regeln der Mathematik: Obiges Gleichungssystem besitzt nämlich in der Regel nur triviale Lösungen der Form $n_1=n_2=0$. Nicht-triviale Lösungen erhält man nur wenn die einzelnen Spalten oder Zeilen der Matrix linear abhängig sind, d.h. durch Addition, Subtraktion oder Multiplikation auseinander hervorgehen. Ein „Maß" hierfür ist die Determinante dieser Matrix. Ist sie gleich Null, sind die Zeilen linear abhängig und wir erhalten die gesuchte Lösung für die Eigenwerte.

Einführung in die Mechanik
Teil 6: Hauptachsentransformation

Die Forderung lautet also

$$\begin{vmatrix} 1{,}5-l & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1{,}5-l \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1{,}5-l)(1{,}5-l)-(-0{,}5)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{l^2 - 3l + 2 = 0} \quad \Rightarrow \quad l_1 = 1 \;\; ; \;\; l_2 = 2$$

Die umrahmte Formel wird auch „*charakteristische Gleichung*“ der Matrix genannt. Sie besitzt, wie bereits erwähnt immer 2 (bzw. im 3-D Fall 3) reelle Lösungen: Die Eigenwerte. Hat man die Eigenwerte berechnet, kann man durch Einsetzen in das ursprüngliche Gleichungssystem die Eigenvektoren berechnen. Dabei kann **immer** eine Zeile gestrichen werden, da eine Zeile ja per Voraussetzung nun von den Anderen abhängt. Damit erhält man für den ersten Eigenwert aus der ersten Zeile:

$$\left(1{,}5 - l_1\right) n_1 - 0{,}5 n_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_1 = n_2$$

Der Eigenvektor muss nun noch normiert werden. Wir wählen hier als Freiwert n_1=1.

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \overset{n_1=1}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Die Berechnung von $\mathbf{n}_2$ verläuft analog. Damit erhalten wir exakt die zu Beginn der Betrachtung eingeführten Vektoren $\mathbf{n}_1$ und $\mathbf{n}_2$ als Eigenvektoren, die ja auf Hauptachsengestalt geführt hatten.

Einführung in die Mechanik
Teil 6: Hauptachsentransformation

Damit ist die Einführung der Hauptachsentransformation abgeschlossen. Wozu nun das Ganze? Hierzu zwei Anmerkungen:

1. Werden in ANSYS „principal stress“ oder „strain“-Größen ausgewertet, erfolgt genau diese Hauptachsentransformation auf der Grundlage der 3-D Spannungs- und Verzerrungstensoren.

2. Wir benötigen diese Darstellung zur Berechnung der logarithmischen Verzerrungen.

Wie sind diese logarithmischen Verzerrungen **H** nun definiert? Ganz einfach über

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{C}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \mathbf{F}$$

Stellt sich die nächste Frage: Wie bilde ich aus einem Tensor 2.Stufe den Logarithmus? Eine genauere Begründung ist an dieser Stelle nicht möglich, dennoch hier die „Spielregeln“ für Funktionen aus aus Tensoren:

1. Der Tensor wird auf Haupachsengestalt gebracht.
2. Anwendung des Logarithmus (Funktion) auf die Eigenwerte.
3. Möglich Rücktransformation auf die kartesische Basis.

Wir wollen hier Schritt für Schritt dies anhand des bisherigen Beispiels nachvollziehen. Die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren wird mit einem entsprechenden Tool vorgenommen. CADFEM verwendet hier Mathcad. Nun aber der Reihe nach. Bereits berechnet wurde

Einführung in die Mechanik
Teil 6: Hauptachsentransformation

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0 \\ 1{,}5 & 4{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Hauptachsentransformation. Dies wird mit Mathcad durchgeführt. Dies liefert die Eigenwerte und Eigenvektoren auf der Basis des bereits vorgestellten Eigenwertproblems:

$$\left|\mathbf{C} - l\,\mathbf{1}\right| = \begin{vmatrix} 1-l & 1{,}5 & 0 \\ 1{,}5 & 4{,}5-l & 0 \\ 0 & 0 & 1-l \end{vmatrix} = 0$$

Lösung:

$$l_1 = 0{,}445 \quad ; \quad l_2 = 5{,}055 \quad ; \quad l_3 = 1$$

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}938 \\ -0{,}347 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}347 \\ 0{,}938 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{C} = l_1\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + l_2\mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + l_3\mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3$$

Einführung in die Mechanik
Teil 6: Hauptachsentransformation

2. Bilden des Logarithmus

$$\begin{aligned}\ln \mathbf{C} &= \ln(l_1)\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \ln(l_2)\mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + \ln(l_3)\mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3 \\ &= -0{,}81\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + 1{,}62\mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + 0\mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

3. Rücktransformation auf die kartesische Basis $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$. Hierfür können die Basisvektoren **n** durch ihre Darstellung in der Basis **e** ersetzt werden also z.B.:

$$\mathbf{n}_1 = 0{,}938\mathbf{e}_x - 0{,}347\mathbf{e}_y$$

Eine etwas einfachere Möglichkeit ist die direkte Überführung in die Matrixschreibweise. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 &= \left(\sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i\right) \otimes \left(\sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i\right) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_2 x_1 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

D.h. man erhält die Darstellung in der Basis **e** durch die Addition von 3 Matrizen (mit den entsprechenden Vorfaktoren). Führt man das durch, erhält man schließlich für den Henckyschen bzw. logarithmischen Verzerrungstensor

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\ln \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -0{,}258 & 0{,}395 & 0 \\ 0{,}395 & 0{,}664 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_i}$$

(AF)