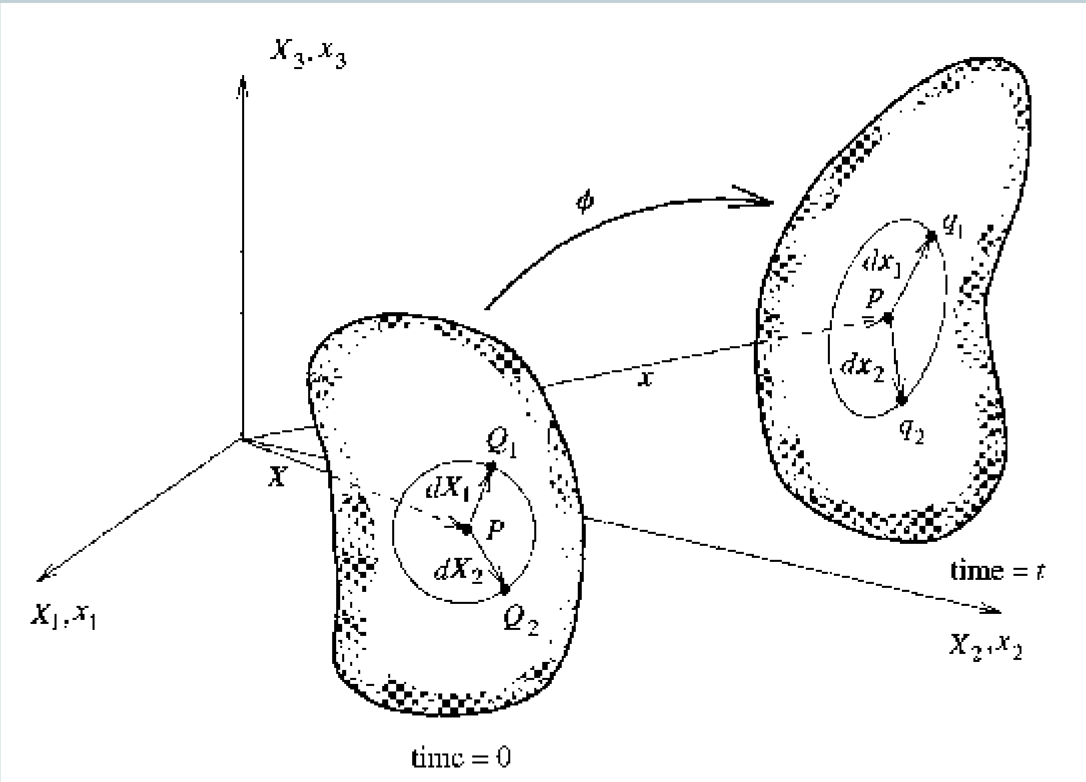
Einführung in die Mechanik
Teil 4: Kinematik (4)

Ausgabe: 03 / 2005

Im letzten Teil der Serie wurde bereits die Bereitstellung von Verzerrungstensoren angekündigt. Wie das Wort bereits impliziert muss ein Maß gefunden werden, das die Deformation des Kontinuums beschreibt.

Dies klingt zunächst zwar trivial, beinhaltet aber z.B. auch die Forderung, dass ein solches Maß **keine** Starrkörperanteile beinhalten darf. Was dies genau bedeutet werden wir im Laufe der Serie noch kennen lernen. Betrachten wir die Linienelemente in der Referenz- und Momentankonfiguration:



Für diese gilt:

$$d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_1 \qquad \text{und} \qquad d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_2$$

Ausgabe: 03 / 2005

Einführung in die Mechanik
Teil 4: Kinematik (4)

Eine Deformation beinhaltet 2 Anteile: Eine Streckung des Linienelementes und eine mögliche Winkeländerung zwischen den Linienelementen. Für **beides** beinhaltet das Skalarprodukt der Linienelemente entsprechende Informationen:

$$d\mathbf{x}_1 \bullet d\mathbf{x}_2 = |d\mathbf{x}_1||d\mathbf{x}_2|\cos(d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2)$$

Nun werden die zuvor definierten Abbildungsgleichungen für beide Linienelemente eingesetzt:

$$d\mathbf{x}_1 \bullet d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{X}_1 \bullet \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}d\mathbf{X}_2 = d\mathbf{X}_1 \bullet \mathbf{C}d\mathbf{X}_2$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$$

Hierzu drei Anmerkungen:

1. **C** ist ein weiterer, fundamentaler Tensor in der Kontinuumsmechanik. Er heißt “rechter Cauchy-Green Tensor”. Rechts deshalb, weil **F** rechts von $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$ steht.
2. Um das Skalarprodukt bilden zu können schreibt man:

$$d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F}d\mathbf{X}_1 = d\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = d\mathbf{X}_1\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$$

   Dabei gilt für die Transposition eines Vektors schlicht:

$$d\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} dX_1^1 \\ dX_1^2 \\ dX_1^3 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad d\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} dX_1^1 & dX_1^2 & dX_1^3 \end{bmatrix}$$

   Das Transpositionssymbol wird dabei meist weggelassen.
3. Der rechte Cauchy-Green Tensor hat als Bezug die Referenzkonfiguration. Dies erkennt man daran, dass dieser mit den Linienelementen der Referenzkonfiguration multipliziert wird.

ENGINEERING SERVICES CADFEM

Ausgabe: 03 / 2005

Einführung in die Mechanik
Teil 4: Kinematik (4)

Genau so kann natürlich das Skalarprodukt der Linienelemente in der Referenzkonfiguration durch die Linienelemente in der Momentankonfiguration ausgedrückt werden:

$$d\mathbf{X}_1 = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}_1 \qquad \text{und} \qquad d\mathbf{X}_2 = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}_2$$

Bevor wir nun fortfahren drei Rechenregeln zur Tensorrechnung:

$$1. \qquad \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-\mathrm{T}}$$

$$2. \qquad \left(\mathbf{AB}\right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

$$3. \qquad \left(\mathbf{AB}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

In Worten: Die Reihenfolge Inversenbildung **ß à** Transposition ist vertauschbar. Deshalb auch die abkürzende Schreibweise (-T). Die Inverse (Transposition) eines Tensorproduktes erhält man durch Invertierung (Transposition) der einzelnen Tensoren **und** Vertauschen der Reihenfolge.

Mit diesem Rüstzeug erhalten wir:

$$d\mathbf{X}_1 \bullet d\mathbf{X}_2 = \left|d\mathbf{X}_1\right|\left|d\mathbf{X}_2\right| \cos\left(d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2\right)$$

$$d\mathbf{X}_1 \bullet d\mathbf{X}_2 = d\mathbf{x}_1 \bullet \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{x}_1 \bullet \mathbf{b}^{-1} d\mathbf{x}_2$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{b}^{-1} = \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$$

b ist ein weiterer wichtiger Tensor in der Kontinuumsmechanik. Er heißt „linker Cauchy-Green Tensor“. Richtig: **F** steht nun auf der linken Seite!

ENGINEERING SERVICES CADFEM

Ausgabe: 03 / 2005

Einführung in die Mechanik
Teil 4: Kinematik (4)

Nun aber genug der Vorarbeit. Wir kommen zurück zum eigentlichen Vorhaben: Der Definition von Verzerrungen. Wie wir schon festgestellt hatten eignet sich das Skalarprodukt hierfür. Um nun die Deformation zu beschreiben, bilden wir einfach die Differenz der Skalarprodukte:

$$d\mathbf{x}_1 \bullet d\mathbf{x}_2 - d\mathbf{X}_1 \bullet d\mathbf{X}_2 := d\mathbf{X}_1 \bullet 2\mathbf{E}d\mathbf{X}_2$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{E} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} - \mathbf{1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{C} - \mathbf{1}\right)$$

E definiert den sog. „Green-Lagrangeschen Verzerrungs-tensor“. Er ist, wie **C**, auf die Referenzkonfiguration bezogen (Multiplikation mit den Linienelementen der Referenzkonfiguration). Bevor wir nun fortfahren andere Größen einzuführen, wollen wir uns **E** noch etwas näher anschauen und versuchen „Ihn“ zu deuten:

1. $d\mathbf{X}_1 = d\mathbf{X}_2 = d\mathbf{X}$

Die linke Seite in obiger Gleichung ist dann nichts anderes als die Differenz der Beträge (quadriert) des Linienelementes (Skalarprodukt!). Damit gilt:

$$d\mathbf{x} \bullet d\mathbf{x} = ds^2 \quad ; \qquad d\mathbf{X} \bullet d\mathbf{X} = dS^2$$

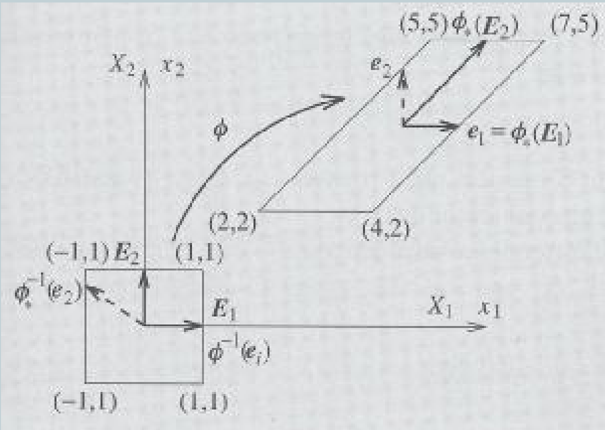
$$\tfrac{1}{2}\left(ds^2 - dS^2\right) = d\mathbf{X} \bullet \mathbf{E}d\mathbf{X}$$

$$\Rightarrow \; \tfrac{1}{2}\left(\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(l^2 - 1\right) = \frac{d\mathbf{X}}{dS} \bullet \mathbf{E}\frac{d\mathbf{X}}{dS} = \mathbf{N} \bullet \mathbf{E}\mathbf{N}$$

$\lambda = ds/dS$ ist dabei die sog. **Streckung** und gibt das Verhältnis der Länge von Linienelementen vor und nach der Definition an. Man erhält diese nach obiger Gleichung durch Multiplikation mit der normierten, beliebigen Richtung N (|N|=1) und dem Verzerrungstensor.

Einführung in die Mechanik
Teil 4: Kinematik (4)

Beispiel: Wir verwenden das Beispiel aus Teil 3:



$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Als Linienelement verwenden wir die X_2-Richtung:

$$d\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \quad ; \quad |\mathbf{N}| = 1$$

$$\Rightarrow \quad d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |d\mathbf{x}| = \frac{\sqrt{18}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad l = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{18}}{1} = \frac{\sqrt{18}}{2} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}\left(l^2 - 1\right) = \frac{7}{4}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{N} \bullet \mathbf{EN} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{7}{4} \quad !!!!!!$$

ENGINEERING SERVICES CADFEM

Einführung in die Mechanik
Teil 4: Kinematik (4)

Ausgabe: 03 / 2005

Nun soll noch untersucht werden, welches Verzerrungsmaß sich unter der Annahme **kleiner** Dehnungen (also ds -> dS) ergibt. Dafür wird die linke Seite der Definition etwas umgeschrieben:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{(ds - dS)(ds + dS)}{dS^2}\right) \approx \tfrac{1}{2}\left(\frac{(ds - dS)2dS}{dS^2}\right) = \frac{(ds - dS)}{dS}$$

Hier wurde die Approximation ds≈dS verwendet. Der Ausdruck ganz rechts ist nicht anderes als die bekannte **Ingenieurdehnung** Δl/l. D.h. die Green-Lagrangeschen Verzerrungen gehen bei kleinen Deformationen in die Ingenieurdehnungen über. Das ist im Übrigen eine wesentliche Voraussetzung für die Definition von Verzerrungsmaßen!

Nachdem wir nun die Steckungen näher untersucht haben, werden wir im nächsten Teil der Serie noch die Gleitungen betrachten.

Außerdem ist es für eine weitergehende Betrachtung notwendig, Tensoren in Ihren Hauptachsen darzustellen. Dem gemäß wird diese Art der Transformation im nächsten Teil den Schwerpunkt bilden.

(AF)